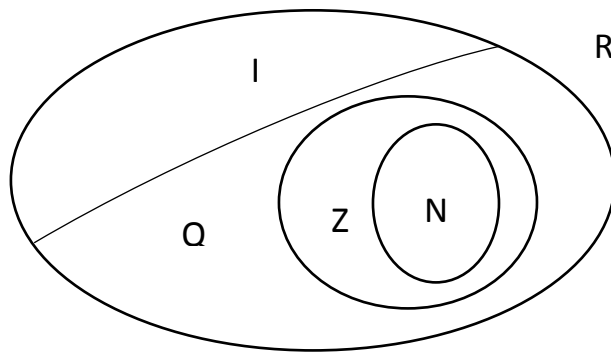


NÚMEROS

Denotaremos con R el conjunto de los **números reales**, que está formado por los **números naturales**, $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, los **enteros** Z que está constituido por $N \cup N^- \cup \{0\}$, por los **racionales** Q , que es el conjunto de los números reales de la forma m/n , con m y n pertenecientes a los Z y $n \neq 0$ (Ej.: $4/3$, $7/2$) y por los **irracionales** I , que son los reales que no se pueden escribir como cociente de dos números enteros (Ej.: $\sqrt{2}$, π ,)



PROPIEDADES BÁSICAS DE R

En R están definidas dos operaciones básicas, la suma y la multiplicación, que verifican las siguientes propiedades, con $a, b, c \in R$:

- S1: asociativa de la suma $(a+b)+c=a+(b+c)$
- S2: Conmutativa de la suma $a+b=b+a$
- S3: el cero es el neutro aditivo $a+0=a \forall a \in R$
- S4: Todo número real tiene inverso aditivo dado $a \in R, \exists -a \in R / a+(-a)=0$
- M1: asociativas del producto $(a.b).c=a.(b.c)$
- M2: conmutativa del producto $a.b=b.a$
- M3: el uno es neutro multiplicativo $1.a=a \forall a \in R$ y $1 \neq 0$
- M4: todo número real distinto de cero tiene inverso multiplicativo
dado $a \in R, \exists 1/a / a.(1/a)=1 (a \neq 0)$
- D: distributiva del producto respecto a la suma $a.(b+c)=a.b+a.c$

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

$$a=a$$

$$\text{Si } a=b \text{ y } b=c \Rightarrow a=c$$

$$\text{Si } a=b \Rightarrow a+c=b+c$$

$$\text{Si } a=b \Rightarrow a.c=b.c$$

Notaremos

$$a+(-b)=a-b$$

$$a \cdot 1/b = a/b \quad (\text{con } b \neq 0)$$

$$[(a+b)+c]+d=a+b+c+d$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$$

n veces

Recordaremos algunas de las propiedades usuales que se deducen de las anteriores:

Para todo par de números reales a, b existe un número real x / $a+x=b$

- | | |
|---|--|
| 1. $b+x=a \Rightarrow x=a-b$ | 2. Si $b \neq 0$ y $b \cdot x=a \Rightarrow x=a/b$ |
| 3. $-(-a)=a$ | 4. $\frac{1}{1/a} = a \quad a \neq 0$ |
| 5. $-(a+b) = -a-b$ | 6. Leyes cancelativas $x+a=x+b \Rightarrow a=b$ |
| 7. $a \cdot 0=0$ | 8. Si $a \cdot b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$ |
| 9. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$ | 10. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ |
| 11. $a/b=c/d \Leftrightarrow a \cdot d=b \cdot c$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ | |
| 12. Si $b \neq 0 \Rightarrow 0/b=0$ | |
| $b/1=b$ | |
| $1/(b/d)=d/b$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ | |
| 13. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ | 14. $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$ con $b \neq 0$ $c \neq 0$ y $d \neq 0$ |
| 15. $-a/b = a/-b = -a/b$ con $b \neq 0$ | 16. $a/b = -a/-b$ con $b \neq 0$ |
| 17. $a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ con $c \neq 0$ | |

POTENCIA EN R CON EXPONENTES ENTEROS

REGLAS DE LA POTENCIACIÓN

Si $x \in R$ y $m, n \in Z$

- | | |
|----|---|
| 1. | $x^0 = 1$ si $x \neq 0$ |
| 2. | $x^1 = x$ |
| 3. | $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ |
| 4. | $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ |
| 5. | $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ |
| 6. | $\frac{x^n}{x^n} = 1$ con $x \neq 0$ |
| 7. | $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ con $y \neq 0$ |

RADICACIÓN EN \mathbb{R}

Ya sabemos que $\sqrt{25}$ se llama raíz cuadrada de 25 y denota el número real cuyo cuadrado es 25. Esto se cumple con 5, puesto que $5^2 = 25$, y con -5 porque $(-5)^2 = 25$.

Al número positivo 5 lo definimos como la raíz aritmética de 25 y llamaremos raíz cuadrada negativa a $-\sqrt{25} = -5$

Consideremos un ejemplo:

$\sqrt[4]{-256}$ vemos que no es 4 porque $4^4 = 256$ ni -4 porque $(-4)^4 = 256$

Es decir, que no existe ningún número real que elevado a la cuarta dé -256.

En general, podemos decir, que no existe ningún número real que sea la raíz par de un número negativo.

Una propiedad fundamental de los números reales nos dice que:

Cada número real positivo a tiene precisamente una raíz n -ésima positiva, siendo n , un número natural.

A partir de esta propiedad fundamental vemos que, por ejemplo, existe un número real positivo b que satisface la ecuación $x^2 = 2$ y ese número es $b = \sqrt{2}$

Definición

Sea a un número real tal que $a > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$, se llama **n -ésima raíz aritmética de a** , al número real positivo b , tal que:

$$b^n = a \text{ y se escribe } b = \sqrt[n]{a}$$

Observación: $\sqrt[n]{a^m}$ puede escribirse como la potencia racional $a^{m/n}$

PROPIEDADES DE LA RAÍZ ARITMÉTICA

Sean a y b números reales positivos, m y n números naturales, entonces se cumple:

1. $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ con $p \in \mathbb{N}$

Observación

La radicación no distribuye con respecto a la suma ni a la resta

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1:

a) $\sqrt[3]{8^5}$ se puede escribir como $8^{5/3}$

La definición de $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$ se amplia para el caso $b^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{b^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$

b) $2^{-1/3} = \frac{1}{2^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $7^{-3/4} = \frac{1}{7^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^3}}$

Resumiendo :

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b > 0$; ya vimos que $b = \sqrt[n]{a}$ es la raíz aritmética de a , pero si en particular el índice es par, el valor de $-b = -\sqrt[n]{a}$ cumple la misma condición que b y se llama raíz negativa de a .

Si $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, entonces c tiene, o no, raíz n -ésima según que n sea par o impar.

Ejemplo 2

Si $c = -125$ y $n = 3$ existe -5 tal que $-5 = \sqrt[3]{-125}$ pero si $c = -100$ y $n = 2$ (par) entonces no existe ningún número real x tal que $x = \sqrt{-100}$

RELACIÓN DE ORDEN EN \mathbb{R}

En \mathbb{R} tenemos una relación de orden que denotamos $<$ y que cumple:

1. Cualesquiera sean los reales a , b y c se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a < b \qquad a = b \qquad b < a$$

2. Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

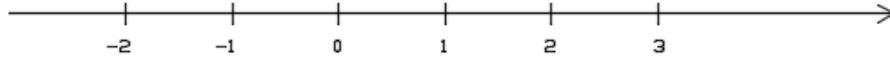
3. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

4. Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

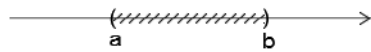
Los números reales se pueden representar sobre una recta, llamada recta numérica, de manera que:

- A cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real.
- Para cada número real existe un único punto de la recta numérica que lo representa.

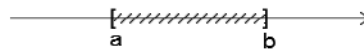


INTERVALO Notaremos

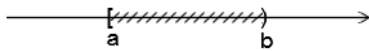
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



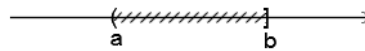
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



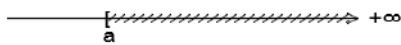
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



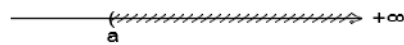
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



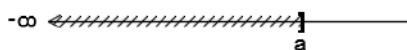
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



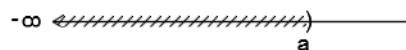
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



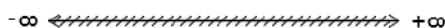
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

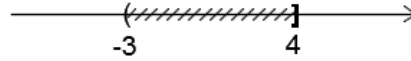


$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$



Ejemplo 3

$$(-3, 2) \cup [1, 4] = \{x / -3 < x < 2 \cup 1 \leq x \leq 4\} = (-3, 4]$$



$$[0, 8] \cap (-1, 6) = \{x / 0 \leq x < 8\} \cap \{x / -1 < x < 6\} = [0, 6)$$



$$(-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \{x / x < 2 \cap x > 3\} = \emptyset$$

VALOR ABSOLUTO

Se define **valor absoluto** $|a|$ de un número $a \in R$ de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4

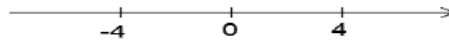
$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = -(-3) = 3$$

PROPIEDADES DE VALOR ABSOLUTO

1. $\forall a \in R \quad |a| \geq 0$
2. $\forall a \in R, \forall b > 0 : |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
3. $\forall a \in R, \forall b > 0 : |a| \geq b \Leftrightarrow (a \leq -b \vee a \geq b)$
4. $\forall a \in R, \forall b \in R : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\forall a \in R \wedge \forall b \in R : |a+b| \leq |a| + |b|$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

- Gráficamente, dado un número real cualquiera, si lo ubicamos en la recta numérica, $|a|$ es la distancia del punto al origen.
- Para $|x| = 4$ la solución es, por definición de valor absoluto $x=4$ y $x=-4$, son los puntos de la recta que distan 4 unidades del origen.



Para resolver $|x| < 4$, aplicamos la propiedad 2. La solución está dada por los x tales que $-4 < x < 4$. Es decir el intervalo $(-4,4) = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 4\}$. Comprende todos los puntos cuya distancia al origen es menor que 4 unidades. Si $|x| \leq 4$ la solución es el intervalo cerrado $[-4,4] = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 4\}$. En este caso incluye los extremos -4 y 4.

- Analicemos $|x| > 4$, aquí la solución es el conjunto de puntos que distan más de cuatro unidades del origen. Para resolver este caso se utiliza la propiedad 3.

$$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4$$

- Resumiendo

$|x|=r$ con $r>0$ el conjunto solución es $S= \{r, -r\}$

$|x|<r$ con $r>0$ el conjunto solución es $S=\{(r, -r)\}$

$|x|\leq r$ con $r>0$ el conjunto solución es $S=\{[r, -r]\}$

$|x|>r$ con $r>0$ el conjunto solución es $S=\{(-\infty, -r) \cup (r, \infty)\}$

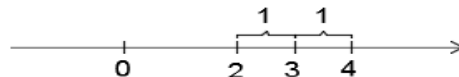
$|x|\geq r$ con $r>0$ el conjunto solución es $S=\{(-\infty, -r] \cup [r, \infty)\}$

- Para resolver $|x-3|=1$, aplicamos la definición de valor absoluto.

$$x-3=1 \quad \text{o bien} \quad -(x-3)=1$$

$$x=4 \quad \text{o bien} \quad -x=-2 \Rightarrow x=2$$

$S=\{4,2\}$ que son los puntos que distan de 3 una unidad.



- Para resolver $|x-3|<1$ aplicamos la propiedad “2” y tenemos:

$$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

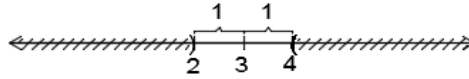
la solución es el intervalo $(2,4)=\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 4\}$

que corresponde a los puntos que distan de 3 menos de una unidad.

- Resuelva $|x-3| \leq 1$

Para resolver la desigualdad $|x-3| > 1$ usamos la propiedad "3"

$$|x-3| > 1 \Leftrightarrow x-3 < -1 \vee x-3 > 1 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 4$$



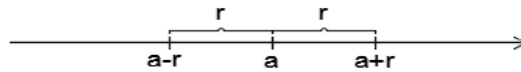
$$S = \{ x / x < 2 \vee x > 4 \} = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Si fuera $|x-3| \geq 1$ la solución sería $S = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$



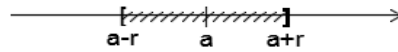
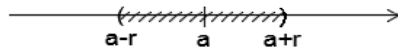
- Resumiendo:

$$\{ x / |x-a| = r \} = \{ a-r, a+r \}$$



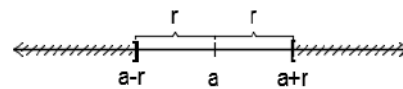
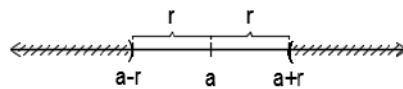
$$\{ x / |x-a| < r \} = (a-r, a+r)$$

$$\{ x / |x-a| \leq r \} = [a-r, a+r]$$



$$\{ x / |x-a| > r \} = (-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty)$$

$$\{ x / |x-a| \geq r \} = (-\infty, a-r] \cup [a+r, \infty)$$



LOGARITMO

Definición

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad \text{con } a > 0, a \neq 1$$

donde a se llama base del logaritmo.

De la definición resulta evidente que, siendo $a > 0$, entonces $b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$.

De la definición de logaritmo y de las propiedades de la potenciación se deducen las siguientes **propiedades de logaritmo**:

- 1- $\log_a a = 1$ $a^1 = a$
- 2- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ con b y $c > 0$
- 3- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ con b y $c > 0$
- 4- $\log_a (c^b) = b \cdot \log_a c$ con $c > 0$
- 5- $\log_a \sqrt[b]{c} = \frac{1}{b} \log_a c$ con $c > 0$

CAMBIO DE BASE

Supongamos que deseamos encontrar el logaritmo en base a de x , pero la calculadora solo nos da logaritmos en base b .

$$(1) y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

aplicamos a ambos miembros \log_b $\log_b a^y = \log_b x$

$$y \cdot \log_b a = \log_b x$$

despejando $y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

de la expresión (1) sustituimos $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Se efectuó de esta manera el cambio de base a por base b .

Ejercicio de aplicación:

El concepto de diversidad biológica involucra dos aspectos de los ecosistemas: cuántas especies viven en él y en qué proporciones están presentes. Cambios importantes en algunos de estos dos componentes alteran el equilibrio natural, iniciando a veces un proceso irreversible, donde todo ecosistema se ve amenazado.

El cálculo del índice de Shannon (H') en una muestra nos permite estimar la diversidad del ambiente que representa según:

$$H' = - \sum_{i=1}^s p_i \cdot \log_2 p_i$$

y expresa en bits/individuo, siendo p la proporción de individuos de la especie 1 en el total de individuos de la muestra y S el total de especies que reconocimos en la misma.

Calcule y compare la diversidad biológica a partir de un muestreo con redes, de los peces de la Bahía Engaño, realizado en el invierno y verano (ver tabla 1), e intente explicar los resultados obtenidos.

ESPECIES PRESENTES	NUMEROSIDAD	
	VERANO	INVIERNO
<i>Simpterygia bonapartei</i> (raya)	23	25
<i>Mustelus schmitti</i> (gatuzzo)	14	17
<i>Myliobatis godei</i> (chucho)	3	4
<i>Squatina argentina</i> (pez ángel)	5	7
<i>Discopyge tschudii</i> (torpedo)	-	8
<i>Callorhynchus callorhynchus</i> (pez gallo)	25	22
<i>Ramnogaster arcuata</i> (lacha)	179	23
<i>Engraulis anchoita</i> (anchoíta)	5	87
<i>Odontesthes schmitti</i> (pejerrey Manila)	152	12
<i>Acanthistius brasilianus</i> (mero)	2	1
<i>Cheilodactylus bergi</i> (papamosca)	5	-
<i>Pamatomus saltatrix</i> (anchoa banco)	4	-
<i>Percophis brasiliensis</i> (pez palo)	17	9
<i>Eleginops maclovinus</i> (róbalo)	10	12
<i>Stromatcus brasiliensis</i> (pampanito)	65	41
<i>Oncopterus darwini</i> (solla)	8	7
TOTAL		

ECUACIONES

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen ligados, mediante operaciones algebraicas, números y letras.

El valor o valores desconocidos de esa igualdad se llaman **incógnitas**.

Ejemplo 5: Son ejemplo de ecuaciones:

1. $2x+1=3$
2. $2x-7=0$
3. $\log 2 = -\log 8(1/x)$
4. $x \cdot y = 4$
5. $t^2 - 3t + 5 = 0$
6. $2x + y = 5$

Las **soluciones** de una ecuación son los valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen cierta la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar la o las soluciones de la misma.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Llamaremos así a las expresiones que podemos llevar a la forma $ax+b=0$ con $a \neq 0$ y $a, b \in R$.

Para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita se aplican las propiedades válidas para igualdades.

Ejemplo 8:

$$3x+2=5x+4 \Rightarrow 3x+2-4=5x+4-4 \Rightarrow 3x-2=5x+0$$

$$3x-2-5x=5x-5x \Rightarrow -2x-2=0 \Rightarrow -2x-2+2=0+2$$

$$-2x=2 \Rightarrow -2x \cdot \frac{1}{2}=2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow -x=1 \Rightarrow -x \cdot (-1)=(-1) \cdot 1$$

$$x=-1$$

verificación: $3 \cdot (-1) + 2 = 5 \cdot (-1) + 4$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son expresiones que se pueden llevar a la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$ y $a, b \in R$. Son de segundo grado pues el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita es dos.

Las soluciones o raíces x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$ pueden obtenerse reemplazando los coeficientes de a , b , c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O en forma abreviada
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 9:

a) $x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = -4$$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad x_{1,2} = 1/2$$

c) $x^2 + x + 17 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-67}}{2} \qquad \text{no tiene raíces reales.}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. Si:

- $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
- $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.
- $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única raíz real, diremos que es una raíz doble.

Las ecuaciones incompletas también pueden resolverse directamente como en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 10:

a) $3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1/3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

b) $7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \qquad x_{1,2} = 0$

c) $3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x + 2) = 0 \qquad x = 0 \text{ ó } 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$

APÉNDICE A.

PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Decir que Q es directamente proporcional a x significa que existe una constante k para la cual $Q = kx$.

El ejemplo más clásico de la función $y = mx$ es cuando decimos y es proporcional a x , en este caso la constante de proporcionalidad es $m = y/x$, con $x \neq 0$.

Ejemplo 1:

Si en ausencia de restricciones ambientales, la población crece a una tasa proporcional a su tamaño, expresar la tasa de crecimiento demográfico como una función del tamaño de la población.

Sea p el tamaño de la población, y R la tasa de crecimiento, entonces

$$R = kp$$

PROPORCIONALIDAD CONJUNTA

Decir que Q es conjuntamente proporcional a x e y significa que Q es directamente proporcional al producto de x por y ; es decir, existe una constante k para la cual $Q = kxy$.

Ejemplo 2:

Cuando los factores ambientales imponen un límite superior al tamaño de la población, ésta crece a una tasa que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la

diferencia entre su tamaño actual y el límite superior. Expresé la tasa de crecimiento demográfico como una función del tamaño de la población:

Sea p el tamaño de la población, $R(p)$ la tasa correspondiente de crecimiento demográfico y b el límite superior impuesto sobre la población por el entorno. Entonces,

$$R(p) = kp(b-p)$$

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Decir que Q es inversamente proporcional a x significa que existe una constante k para la cual $Q = k/x$

Ejemplo 3:

La ecuación $PV = KnT$ relaciona la presión P , el volumen V y la temperatura de un gas con el número de moléculas del gas presente, donde K es una constante. Despejando P se tiene que $P = (KnT)/V$, de lo cual se concluye que P es directamente proporcional a n , y T es inversamente proporcional a V . Si se mantienen constantes n y V , al duplicar la temperatura del gas, se duplica su presión. Con n y T constantes, al duplicar el volumen disminuye la presión a la mitad.

TRABAJO PRÁCTICO: PROPORCIONALIDAD

Ejercicio 1:

a) Complete la tabla de manera que x e y resulten directamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?. Escriba la ecuación que relaciona x e y .

x	y
10	20
4	8
5	10
7	14

b) Escriba en cada caso la función que relaciona x e y . ¿Cuál es una relación de proporcionalidad directa y cuál inversa?

1)

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

2)

x	y
1	6
2	3
3	2
4	3/2

3)

x	y
1	1,5
2	3
3	4,5
4	6

Ejercicio 2: Si en ausencia de restricciones ambientales, la población crece a una tasa proporcional a su tamaño, exprese la tasa de crecimiento demográfico como una función del tamaño de la población.

Ejercicio 3: Halle la fórmula que relacione la temperatura en grados Celsius con la temperatura en grados Fahrenheit, si la diferencia entre los grados Fahrenheit y 32 es directamente proporcional a los grados Celsius, y si 212 grados Fahrenheit corresponden a 100 grados Celsius.

Ejercicio 4: La tasa a la cual la temperatura de un objeto cambia es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la del medio que lo rodea. Exprese la tasa como una función de la temperatura del objeto.

Ejercicio 5: En un medio limitado donde A es el número máximo de bacterias que soporta dicho medio, la tasa de crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número presente y a la diferencia entre A y el número presente.

Supóngase que un millón de bacterias es el número máximo que soporta el medio ambiente y la tasa de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando hay 1.000 bacterias en el medio.

- a) Exprese la tasa de crecimiento bacteriano como una función del número de bacterias presentes.
- b) Determine la tasa de crecimiento cuando hay 100.000 bacterias presentes.

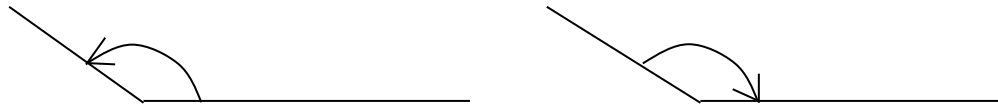
Ejercicio 6: En un pequeño poblado de 5.000 habitantes, la tasa de expansión de una epidemia (intensidad de cambio del número de personas infectadas) es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de ellas no contagiadas.

APÉNDICE B.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

ÁNGULOS

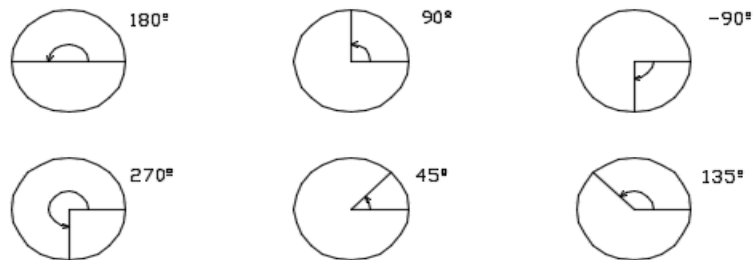
Un ángulo se forma cuando un segmento de recta en el plano gira con respecto a otro alrededor de su extremo común. Se dice que el ángulo resultante es un ángulo positivo si la rotación se hace en sentido contrario al de las agujas del reloj y es un ángulo negativo si la rotación va en el sentido de las agujas del reloj.



MEDICIÓN DE ÁNGULOS

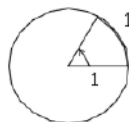
SISTEMA SEXAGESIMAL.

Grados para medir ángulos. Un grado es la cantidad que debe girar un segmento de recta para que su extremo libre trace $1/360$ de un círculo. Así por ejemplo la rotación completa en sentido contrario al de las agujas del reloj, que genera un círculo, tiene 360° ; la mitad de una rotación completa, tiene 180° .



SISTEMA RADIAL

Medición en radianes: un radián se define como la cantidad que debe girar un segmento de recta de longitud 1 para que su extremo libre trace un arco circular de longitud 1.



La longitud de la circunferencia de un círculo de radio 1 es 2π . Por lo tanto 2π radianes corresponden a 360° , π radianes corresponden a 180° y, en general, la relación radianes y grados es dada por la siguiente proporción.

$$\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$$

Ejemplo 1:

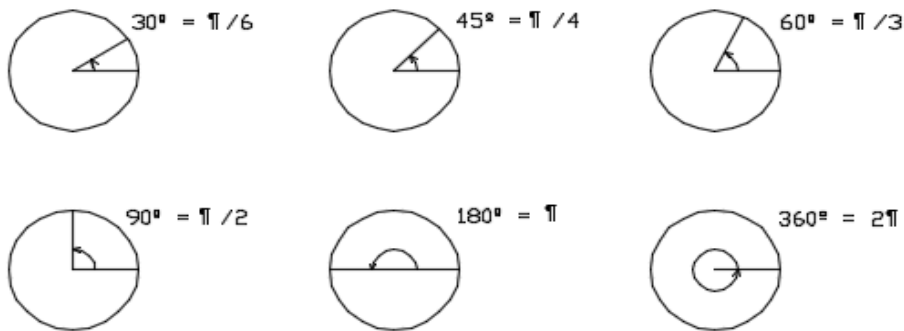
a) Convertir 45° a radianes.

De la proporción $\frac{45}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$ se obtiene que 45° equivale a $\frac{\pi}{4}$ radianes.

b) Convertir $\frac{\pi}{6}$ radianes a grados.

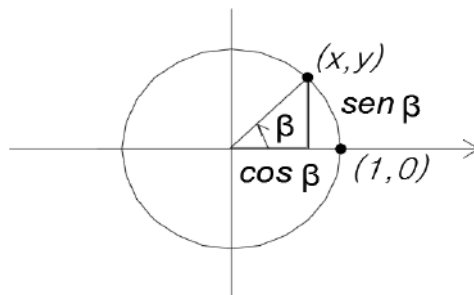
De la proporción $\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi}$ se obtiene que $\frac{\pi}{6}$ radianes equivale a 30°

En la figura siguiente se muestran algunos de los ángulos más importantes medidos en grados y en radianes.



EL SENO Y EL COSENO

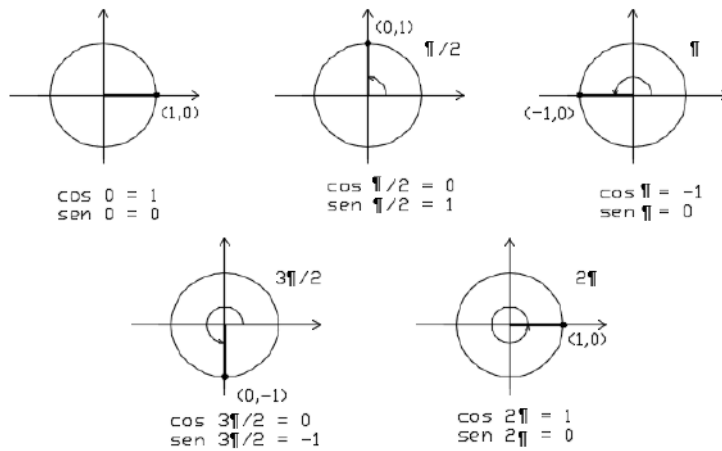
Suponga que el segmento de recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ en el eje x gira un ángulo de β radianes, de manera que el extremo libre del segmento se mueve de $(1,0)$ a un punto (x,y) como muestra la figura.



Las coordenadas x e y del punto (x,y) se denominan respectivamente coseno y seno del ángulo β .

Notación: $\cos \beta = x$ $\text{sen } \beta = y$

Vemos en la figura siguiente los valores del seno y del coseno para los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$



En la tabla que sigue resumimos valores importantes para el seno y el coseno.

β	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sen β	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos β	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

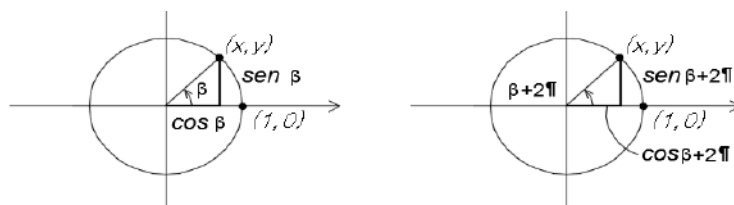
PROPIEDADES DEL SENO Y DEL COSENO

Como hay 2π radianes en una rotación completa, se deduce que:

$$\text{sen}(\beta + 2\pi) = \text{sen } \beta$$

$$\cos(\beta + 2\pi) = \cos \beta$$

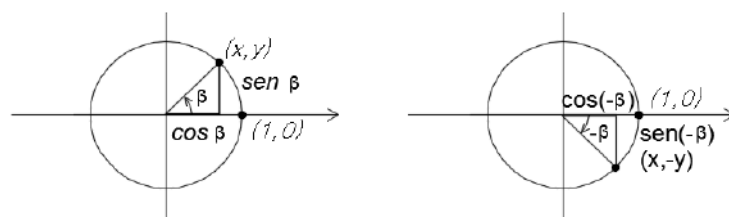
Es decir las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π .



Como ángulos negativos corresponden a rotaciones en el sentido de las agujas del reloj, se concluye que:

$$\text{sen}(-\beta) = -\text{sen } \beta$$

$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$



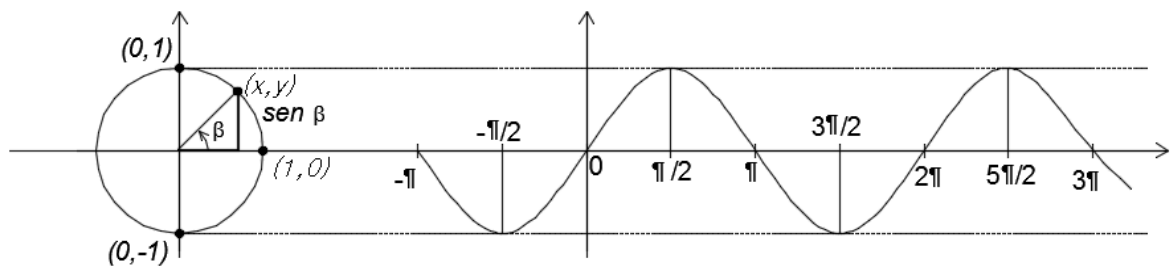
Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\pi/2) &= -\text{sen} \pi/2 = -1 \\ \cos 5\pi/2 &= \cos(\pi/2 + 2\pi) = \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

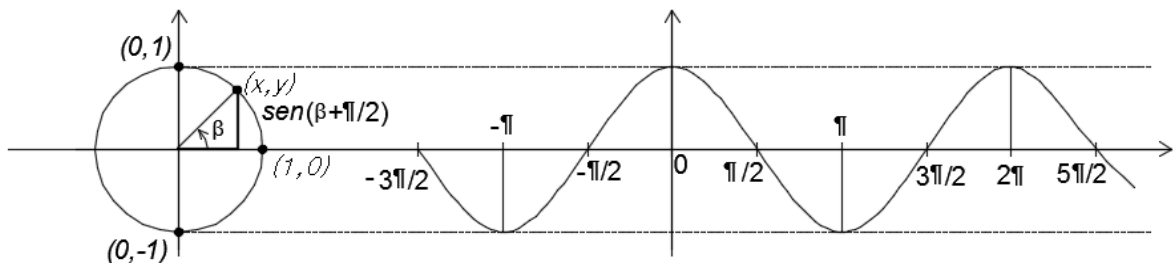
GRÁFICAS DE $\text{SEN } \theta$ Y DE $\text{COS } \theta$.

De las definiciones de seno y coseno es obvio deducir que cuando θ va de 0 a 2π , la función $\text{sen } \theta$ oscila entre 1 y -1 empezando en 0, y la función $\text{cos } \theta$ oscila entre 1 y -1, empezando en 1. Esto conjuntamente con las propiedades enunciadas indican que las gráficas de estas funciones son las siguientes:

Gráfica de $\text{sen } \theta$



Gráfica de $\text{cos } \theta = \text{sen}(\theta + \pi/2)$



OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Otras cuatro funciones trigonométricas “tangente, cotangente, secante y cosecante” se definen en términos del seno y del coseno, como sigue.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} \\ \sec \theta &= \frac{1}{\text{cos } \theta} & \text{cosec } \theta &= \frac{1}{\text{sen } \theta} \end{aligned}$$

siempre que los denominadores no sean cero.

Ejemplo 3:

Calcular a) $\tan \pi$ b) $\cot \pi / 2$ c) $\sec(-\pi)$ d) $\csc(-5 \pi / 2)$

$$a) \tan \pi = \frac{\operatorname{sen} \pi}{\operatorname{cos} \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$b) \cot \pi / 2 = \frac{\operatorname{cos} \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$c) \sec(-\pi) = \frac{1}{\operatorname{cos}(-\pi)} = \frac{1}{\operatorname{cos} \pi} = -1$$

$$d) \csc \frac{-5\pi}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen}(-5\pi / 2)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(5\pi / 2)} = -1$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad es una ecuación que se cumple para todos los valores de una variable o variables.

Para cualquier ángulo θ ,

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

Para cualesquiera ángulos α y β ,

$$y \quad \begin{aligned} \operatorname{cos}(\alpha + \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

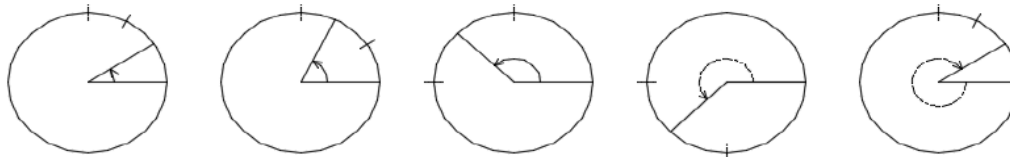
Para cualquier ángulo θ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} 2\theta &= \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta \end{aligned}$$

TRABAJO PRÁCTICO

Ejercicio 1:

Expresar los ángulos indicados en la figura en grados y en radianes.



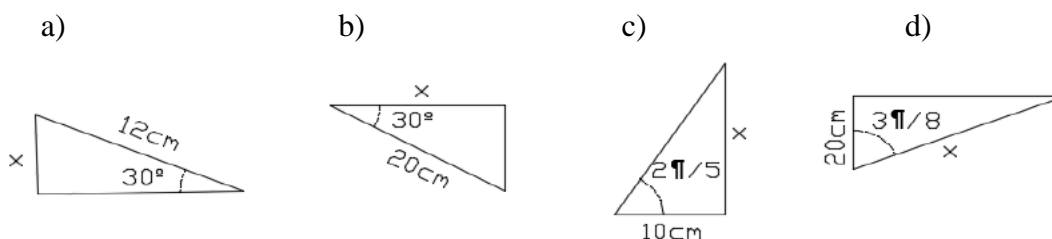
Ejercicio 2:

Expresar gráficamente los ángulos dados.

- a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\beta = -60^\circ$ c) $\gamma = 225^\circ$ d) $\phi = 115^\circ$ e) $\varphi = -120^\circ$ f) $\lambda = 390^\circ$

Ejercicio 3:

Con una precisión de tres decimales, calcular la longitud del lado identificado con "x".



Ejercicio 4:

Demostrar cada una de las siguientes identidades:

- a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x + \operatorname{sen} x$ b) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$
 c) $\tan^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \tan^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$ d) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

Ejercicio 5:

A partir de gráficos conocidos, graficar cada una de las siguientes funciones:

- a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = \tan 2x$ c) $y = 1 + \cos x$

Ejercicio 6:

Restringir convenientemente el dominio de las siguientes funciones para que sean inyectivas. Graficar la función y su inversa.

- a) $y = \cos x$ b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



MODULO INTRODUCTORIO DE MATEMÁTICAS

AÑO 2022

NÚMEROS REALES:

1. Indicar a que conjunto/s pertenece cada uno de los siguientes números:

$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt{25}$	$-\frac{9}{81}$
$1,0\bar{3}$	1,87999	-2^{-4}	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\frac{5}{8}$	e

2. Expresar los siguientes conjuntos usando notación de conjunto y representarlos en una recta numérica.

- a) El conjunto de todos los números reales menores o iguales que 6.
b) El conjunto de todos los números reales mayores que -2 y menores que 5.
c) El conjunto de todos los números reales negativos mayores o iguales que -10

3. Representar en una recta numérica los siguientes conjuntos. Expresar con palabras de que conjunto se trata.

- a) $A = \{a \in \mathbb{N} : a > 4\}$ b) $B = \{b \in \mathbb{Z} : -8 < b < -3\}$
c) $C = \{c \in \mathbb{Q} : c > 2/3\}$ d) $D = \{d \in \mathbb{R} : d < -1\}$

4. Completa el siguiente cuadro (Puede ocurrir que no exista resultado, en algunos casos)

a	b	c	$a \cdot b$	$a + c$	$\frac{b}{c}$	$a + b \cdot c$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$	$\frac{b}{a} + \frac{b}{c}$
5	6	2						
0,1	4	8/5						
1,5	0,5	20						
-2	$-2/3$	-9						
$0, \hat{1}$	1	0						

5. Responde: ¿Cuáles de los siguientes enunciados son falsos y por qué?, para números $a, b, y c \in \mathbb{R}$.

$\frac{(a+c)}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}, b \neq 0$	
$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, a, b \neq 0$	
$a - b = b - a$	

$a - (b + c) = a - b + c,$	
$\frac{1}{1/a} = a$	
$\frac{1}{b} = b^{-1}$	
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	
$\sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	

6. Simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a)
$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{4^{-1}} : \frac{2}{3}$$

b)
$$\frac{12 : \frac{4}{3}}{\frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{-\frac{8}{27}}}$$

7. Resolver utilizando la definición y las propiedades de la potenciación y radicación.

a) $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^4$

b) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$

c) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5^5}\right)^3$

d) $(7^{-1} : 7^{-3}) \cdot 7^{-2}$

e) $\left(\sqrt[5]{(-4)^3} : (-4)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}}\right)^{-1}$

f) $\frac{\sqrt{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 2^3}}{(\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{3})^6}$

8. Sean $a, b \in R+$, simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades.

a)
$$\frac{(a^2 \cdot b)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{b^5}}{\sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot b}}$$

b)
$$\frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt{a \cdot b^3}}$$

9. Calcular el valor exacto sin utilizar calculadora.

a) $-6 \cdot 3 - (-5) \cdot [-9 : (-3)]$

b) $(3^2)^2 - [(-2)^3]^2 + (-5^2)$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} : \sqrt{8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \frac{3}{2} : (-2) - \left[\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1}\right]^0$

d) $\left(-\frac{16}{2} + 4\right) : 4 - \left(\frac{2-5}{-4} \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)$

e) $\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{6} - \frac{2\sqrt{3^3}}{3} + \frac{5\sqrt{48}}{12}\right) \cdot \sqrt{3} :$

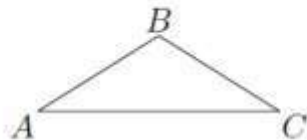
$$f) \frac{\sqrt{2} \sqrt{3 \cdot \left(\frac{8}{27}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right) \frac{15}{9} \cdot 3 + 1}}{\left[3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right] \cdot \left(2 - \frac{2}{7}\right)}$$

10. Racionalizar las siguientes expresiones y, cuando sea posible, operar algebraicamente hasta obtener una expresión más simple.

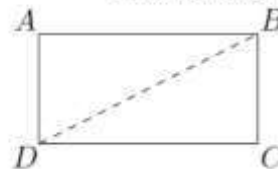
$$a) \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}} \quad b) \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}} \quad c) \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}$$

11. ¿Cuáles la expresión algebraica que indica el perímetro y el área de las figuras dibujadas?

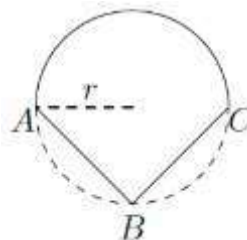
a) $\triangle ABC$ en un triángulo isósceles.



b) $ABCD$ en un rectángulo



c) Los puntos A, B, C están sobre la circunferencia de radio r.



12. Resuelve las siguientes ecuaciones, indicar a que conjunto numérico pertenece la solución obtenida y representarla en la recta numérica.

$$a) 7x + \sqrt{3} = 2$$

$$b) 3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 7$$

$$c) 21 - 7x = 41x - 123$$

$$d) \frac{x}{4} - \frac{x-5}{2} = x - \frac{1}{8}$$

$$e) \frac{x+4}{5} - 7 = 3 - \frac{x+2}{4}$$

$$f) \left(\sqrt{(1+4)^2 - 16} - 3\right)x = \frac{1}{5}$$

$$g) \frac{1}{6}(a+8) = \frac{3-2a}{4} + 2a - \frac{73}{12}$$

$$h) \frac{2t}{15} - \frac{3t-5}{20} = \frac{t}{5} - 3$$

13. Encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x + 3 - x^2 = 0$

b) $2x^2 - x + 6 = 0$

c) $3x^2 = 12(x - 1)$

d) $2x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = x(x - 2)$

14. Plantear cada uno de los siguientes problemas, resolver y verificar la validez de la respuesta Obtenida:

- a) Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9506.
- b) En 5 años Alberto tendrá 3 veces la edad que tendrá hace 7 años. ¿Cuántos años tiene Alberto?
- c) Si a un número se le restan 30 unidades y esta diferencia se multiplica por 13, se obtiene 195. ¿Cuál es el número?

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Sabías que todas las sustancias que existen en el universo están constituidas por millones de partículas llamadas moléculas? Y que además, cada una de ellas está constituida por partículas muchísimo más pequeñas llamadas átomo?

Lo que mide un átomo es aproximadamente 1 dividido 100.000.000.000, es decir, una cien milésima parte de un millonésimo de milímetro, es decir:

0.00000000001 milímetros

Que en notación científica podemos expresar como:

1×10^{-11} milímetros.

15. **NOTACIÓN CIENTÍFICA:** Expresa con notación científica la cifra que se menciona en cada una de las siguientes frases:

- a) Una ciudad tiene ocho millones y medio de personas.....
- b) Se contaron en un cultivo trescientas mil bacterias.....
- c) El error absoluto cometido en una aproximación realizada es de 0,00004.....
- d) La estrella más cercana a nosotros (hasta el momento conocida) es Epsilon Eridami, ubicada a 100.000.000.000.000 Km.....
- e) Doscientas treinta mil personas visitaron una exposición de antigüedades en San Telmo.....
- f) La velocidad de la luz es aproximadamente de 300.000 Km/seg.....
- g) Un billón.....
- h) Una billonésima.....
- i) El GOOGOL.....

VALOR ABSOLUTO E INECUACIONES

16. Representar gráficamente y escribir como conjunto la solución de:

- a) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty) =$
- b) $[-3; +\infty) \cap [2; 4) =$
- c) $(0; 3) \cup [2; +\infty) =$
- d) $(-2; 2] \cap [5; +\infty) =$
- e) $(-1; 0] \cap [0; 3] =$
- f) $(-\infty; 3] \cup (-1; +\infty) =$

17. Hallar si existen, los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

- a) $\left| \frac{3}{2}x \right| = 0$
- b) $|-3x| = 6$
- c) $|x-4| = 4$
- d) $|x| = -5$
- e) $|2x+1| = \frac{1}{3}$
- f) $|-3x+2| = 4$

18. Resuelva, grafique en la recta real y escriba su solución en forma de intervalos:

- a) $|x| < 4$
- b) $|-x| < 3$
- c) $|x+7| < 2$
- d) $|5x-1| < -6$
- e) $|5-8x| \leq 1$
- f) $|x/3| > 1/2$
- g) $|4x-1| \geq 0$
- h) $|1-3x| > 2$
- i) $\left| \frac{x-8}{4} \right| \leq 2$
- j) $\left| \frac{3x-8}{2} \right| \geq 4$

LOGARITMOS

19. Completa el siguiente cuadro:

Enunciado	Expresión Simbólica	Ejemplo Numérico
El logaritmo de 1, en cualquier base, es cero.	$\log_b 1 = 0$, con $b > 0$ y $b \neq 1$	$\log_7 1 = 0$
	$\log_b b = 1 \quad \forall b$	
El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, si estos existen.	$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	
El logaritmo de un cociente es igual a la resta entre los logaritmos del dividendo y del divisor, si estos existen y el divisor es distinto de cero		
	$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$	

20. Calcula aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 16 =$

d) $\log_3 3 =$

b) $\log_2 \frac{1}{2} =$

e) $\log_3 1 =$

c) $\log_{27} 9 =$

f) $\log_{16} 32 =$

21. Resolver usando la calculadora

a) $\log e$

b) $\log (3 \cdot 10^{-2})$

c) $\ln 256.32$

d) $\ln\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right)^4 - \log 3$

e) $(\ln \sqrt{3} - \log 4)^2 - \ln 18$

f) $\log(\ln \sqrt{2})$

22. Emplear cambio de base para hallar el resultado usando la calculadora

a) $\log_4 8$

b) $\log_3 32$

c) $\log_{4,5} 0.21$

d) $\log_{0.15} 47$

23. Escribe las siguientes expresiones como un único logaritmo.

a) $\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)$

b) $\left(\frac{x}{3}\right)[\ln(2x+1) - \ln(2x)]$

c) $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

d) $(3x)[\ln(x+1) - \ln x]$

e) $\left(\frac{\log(1+10x)}{x}\right)$

24. Calcula aplicando propiedades:

a) $\log \frac{0,01 \cdot \sqrt[3]{0,1}}{\sqrt{10^3}} =$

; b) $\log_2 \left(\frac{\sqrt[5]{2} \cdot 1/2}{\sqrt{4}}\right)^{15} =$

; c) $\log_2 \left(\frac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{1/2}}\right)^{3/2} =$

TRIGONOMETRIA

25. Marca con una "x" la opción correcta.

Recuerda que, para medir ángulos se utilizan distintos sistemas de medición: Sexagesimal (la unidad es el **grado sexagesimal** (1°), Circular o radial (la unidad es el **radián**) y Centesimal.

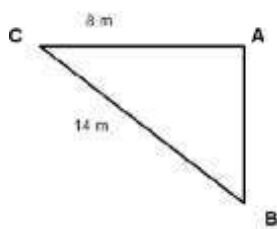
*Un ángulo de 200° es equivalente a :			
a) $(1/3) \pi$ <input type="checkbox"/>	b) $(3/10) \pi$ <input type="checkbox"/>	c) $(10/9) \pi$ <input type="checkbox"/>	d) $(9/10) \pi$ <input type="checkbox"/>
*Un ángulo de 330° es equivalente a :			
a) $(11/3) \pi$ <input type="checkbox"/>	b) $(11/6) \pi$ <input type="checkbox"/>	c) $(15/9) \pi$ <input type="checkbox"/>	d) $(4/3) \pi$ <input type="checkbox"/>
*Un ángulo de $4/9 \pi$ es equivalente a :			
a) 100° <input type="checkbox"/>	b) 80° <input type="checkbox"/>	c) 60° <input type="checkbox"/>	d) 40° <input type="checkbox"/>
*Un ángulo de $-\pi/4$ es equivalente a :			
a) 270° <input type="checkbox"/>	b) 135° <input type="checkbox"/>	c) 315° <input type="checkbox"/>	d) 225° <input type="checkbox"/>

26.

- a) Dibuja un triángulo equilátero de 1cm de lado, traza la altura, aplica el Teorema de **Pitágoras** y obtiene los valores exactos de las seis razones trigonométricas de 60° . **(Sugerencia:** puedes aplicar este importante teorema a otras figuras geométricas y calcular las razones trigonométricas de otros ángulos. Inténtalo.
- b) Completa la tabla de valores exactos de las razones trigonométricas de ángulos particulares.

α (en grados)	0°	30°	45°	60°	90°
α (en radianes)				$\pi/3$	
Sen α				$\sqrt{3}/2$	
Cos α				$1/2$	
Tg α				$\sqrt{3}$	
Medida del arco giro				$\pi/3$	
				$1/6$ giro	

27. Teniendo en cuenta los datos que figuran en el triángulo rectángulo, encuentre la amplitud de los ángulos interiores y la medida del lado AB



28. De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos es 40° y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcular el ángulo y los lados que faltan.
29. Calcular la altura de la torre el observador está a 7 m de la base de la torre, el ángulo con el que está observando la cúspide es de 60° y sostiene el artillugio a una altura de 1,5 metros.



30. Halla, en cada caso tres ángulos que verifiquen cada una de las ecuaciones. Expresa sus medidas en radianes.
- $\text{sen } x = 1$
 - $\text{cos } x = -1$
 - $\text{tg } x = 0$

FUENTES:

- MÓDULO INTRODUCTORIO DE MATEMÁTICA – UNPSJB – Sede Comodoro Rivadavia
- Curso de Nivelación. Matemática. Notas Teóricas y Guía de Actividades." Departamento de Matemática. UNS.
- Trabajo Practico Nº 1. Cátedra Matemática 1 – SEDE TRELEW – U.N.P.S.J.B.

RESULTADOS:

1.

Q	I	I	Z	N	Q
Q	Q	Q	N	Q	I

2. a) $A = \{x \in R : x \leq -6\}$

2. b) $B = \{x \in R : -2 < x < 5\} \cup B = \{x \in R : x > -2 \wedge x < 5\}$

2. c) $C = \{x \in R : x \geq -10\}$

3.a) Naturales Positivos

3.b) Naturales Negativos

3.c) Racionales

3.d) Naturales Negativos

4.

a	b	c	$a \cdot b$	$a + c$	$\frac{b}{c}$	$a + b \cdot c$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$	$\frac{b}{a} + \frac{b}{c}$
5	6	2	30	7	3	17	7/6	21/5
0,1	4	8/5	0.4	17/10	5/2	13/2	17/40	85/2
1,5	0,5	20	0.75	21.5	0.025	115/10	43	43/120
-2	-2/3	-9	4/3	-11	2/27	4	33/2	
$0, \hat{1}$	1	0	$0, \hat{1}$	$0, \hat{1}$	\neq	$0, \hat{1}$	$0, \hat{1}$	\neq

5.a) V b) F c) F d) F e) V f) V g) F h) F

6.a) 6

6.b) -3

7.a) 2^{-8} b) $2^{7/8} = \sqrt[7]{2^8}$ c) 5^3 d) 1 e) $-4^{2/5} = \sqrt[5]{-4^2}$ f) $3^{-3/2} 2^{-6/4} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^3 4} \sqrt{2^6}}$

8.a) $a^{5/4} b^{3/2}$ b) $a^{3/2} b^{-1/2} = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b}}$

9.a) -3 b) 42 c) -10/4 d) -4 e) 1 f) 87/70

10.a) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-1}{3}$ b) $1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}$

11.a) $\overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AC} = \text{perímetro o } (\overline{AB})^2 + \overline{AC} = \text{perímetro}$

11.b) $(\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 = \text{perímetro } \overline{AD} \times \overline{DC} = \text{área}$

11.c) $2\pi r = \text{perímetro}$ $\pi r^2 = \text{área}$

12.a) $x = \frac{2-\sqrt{3}}{7}$ b) $x=-15$ c) $x=3$ d) $x=21/10$ e) $x=58/3$ f) g) $a=5$
 h) $t=15$

13.a) $x_1=3 \ x_2=-1$ b) \neq c) $x_{1,2}=2$ d) $x_1=-1/2 \ x_2=-2$

15.a) $8,5 \times 10^6$ b) 3×10^5 c) 4×10^{-5} d) 1×10^{14} e) $2,3 \times 10^5$ f) 3×10^5
 g) 1×10^9 h) 1×10^{-12} i) 1×10^{100}

16.a) $A = \{x \in R : 0 < x < 3\}$

16.b) $A = \{x \in R : 2 \leq x < 4\}$

16.c) $A = \{x \in R : x > 0\}$

16.d) $A = \{\emptyset\}$

16.e) $A = \{x \in R : x = 0\}$ $A = \{0\}$

16.f) $A = \{x \in R\}$

17.a) $x_{1,2}=0$ b) $x_1=2, x_2=-2$ c) $x_1=8, x_2=0$ d) \nexists e) $x_1=-1/3, x_2=-2/3$

f) $x_1=-2/3, x_2=2$

18.a) $(-4,4)$ b) $(-3,3)$ c) $(-9,-5)$ d) $(-\infty,7/5)$ e) $(1/2,3/4)$ f) $(-\infty,-3/2) \cup (3/2,+\infty)$

g) $(-\infty,+\infty)$ h) $(-\infty,-1/3) \cup (1,+\infty)$ i) $[0,16]$ j) $(-\infty,0] \cup [16/3,+\infty)$

20.a) $y=4$ b) $y=-1$ c) $y=2/3$ d) $y=1$ e) $y=0$ f) $y=5/4$

23.a) $\ln(1+2x)^{1/x}$ b) $\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x/3}$ c) $\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}$ d) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ e) $\log(1+10x)^x$

24.a) $1/6$ b) 27 c)

25.a) $\frac{10}{9}\pi$ b) $\frac{11}{6}\pi$ c) 80° d) -45°

27) $\text{lado } \overline{AB} = 11,48 \text{ cm}$ $\alpha = 55,08^\circ$ $\beta = 35^\circ$

28) $\text{hipotenusa} = 15,55723$ $\text{adyacente} = 11,917$ $\beta = 50^\circ$

29) $13,24935 \text{ m}$

30.a) $\text{sen } 90^\circ=1$ $\text{sen } 450^\circ=1$

30.b) $\text{cos } 180^\circ=-1$ $\text{cos } 540^\circ=-1$

30.c) $\text{tg } 90^\circ=0$ $\text{tg } 450^\circ=0$